

# RAPPELS MATHÉMATIQUES

## Partie 1 : Dérivée – Différentielle – Equations Différentielles

### I. Dérivée d'une fonction

Nous distinguerons ici deux types de fonctions : les fonctions à une variable et les fonctions à plusieurs variables.

#### 1. Dérivée d'une fonction à une variable

##### a) Définition

On appelle fonction à une variable une fonction qui dépend d'une seule variable. Soit une fonction  $y = f(x)$  définie et continue dans un intervalle  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$  et soient deux variables  $x_0$  et  $x_0 + \Delta x$  de  $]a, b[$  aux quelles correspondent deux valeurs de la fonction  $y_0 = f(x_0)$  et  $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ . La dérivée de la fonction  $y$  notée  $f'$  au point d'abscisse  $x_0$  est la limite du rapport  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  quand  $\Delta x \rightarrow 0$ . On note :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ainsi on notera  $f'(x)$  la dérivée de la fonction  $f(x)$  définie comme suit :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

##### b) Dérivées usuelles et quelques règles de dérivation

Il est très important de savoir dériver les différentes fonctions. La dérivée des fonctions interviendra dans presque tous les chapitres de ce cours d'où la nécessité de maîtriser cette notion. Nous présentons ici la dérivée de quelques types de fonctions :

| Fonctions                | Dérivées                                                           |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $f^n(x)$                 | $nf'f^{n-1}$                                                       |
| $e^{f(x)}$               | $f'(x)e^{f(x)}$                                                    |
| $\sin f(x)$              | $f'(x)\cos f(x)$                                                   |
| $\cos f(x)$              | $-f'(x)\sin f(x)$                                                  |
| $\operatorname{tg} f(x)$ | $\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$ ou $f'(x)[1 + \operatorname{tg}^2(x)]$ |
| $\ln f(x)$               | $\frac{f'(x)}{f(x)}$                                               |

Dans le cas où la fonction se présente sous la forme d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions, les règles ci-dessous permettent de calculer la dérivée de la fonction.

| Fonctions         | Dérivées                     |
|-------------------|------------------------------|
| $f = (g + h)$     | $f' = g' + h'$               |
| $f = g \cdot h$   | $f' = g'h + h'g$             |
| $f = \frac{g}{h}$ | $f' = \frac{g'h - h'g}{h^2}$ |

Exemples :  $f(x) = \sin(3x + 1)$  ;  $g(x) = \cos^3(x^2 + 4)$  ;  $h(x) = \ln[\operatorname{tg}(e^{2x})]$

## 2) Dérivée d'une fonction à plusieurs variables

On appelle fonction à plusieurs variables, une fonction qui présente plusieurs variables ou paramètres. Pour ces fonctions à plusieurs variables, étant donné qu'il n'est pas possible de dériver la fonction simultanément par rapport à toutes les variables, on procède de la façon suivante : on dérive la fonction par rapport une variable en supposant les autres comme étant constantes et ainsi de suite... Ainsi donc lorsque nous dérivons la fonction par rapport à une variable, nous disons que nous avons dérivé partiellement la fonction  $f$ , d'où la notion de dérivée partielle.

### - Dérivée Partielle

Soit  $f(x,y,z)$  une fonction à trois variables. On appelle dérivées partielles de  $f$ , les fonctions définies par :

$$f'_x = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z}$$

$$f'_y = \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,z}$$

$$f'_z = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y}$$

Exemples :  $f(x,y,z) = x^2y + 2y^2z^3$  ;  $f(x,w,t) = \sin(wt^2 + 4x)$

## II. Différentielle d'une fonction

### 1) Différentielle d'une fonction à une variable

Soit  $f(x)$  une fonction à une variable. On appelle différentielle de la fonction  $f$  notée  $df$  l'expression :

$$df = f'(x)dx$$

Exemple :  $f(x) = xe^{3x}$  ;  $g(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 2)}$

## 2) Différentielle d'une fonction à plusieurs variables

Tout comme dans le cas de la dérivée, nous allons introduire ici la notion de différentielle partielle.

### a) Différentielle partielle

Soit  $f(x,y,z)$  une fonction à trois variables. On appelle différentielles partielles de  $f$ , les fonctions définies par :

$$df_x = f'_x dx \Rightarrow df_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx$$

$$df_y = f'_y dy \Rightarrow df_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

$$df_z = f'_z dz \Rightarrow df_z = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

### b) Différentielle totale

Soit  $f(x,y,z)$  une fonction à trois variables. On appelle différentielle totale de  $f$ , notée  $df$  la somme des différentielles partielles de  $f$  :

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

NB : Pour les fonctions qui se présentent sous la forme d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions les différentielles de fonction sont données par :

$$d(g + h) = dg + dh$$

$$d(g.h) = h dg + g dh$$

$$d\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{h dg - g dh}{h^2}$$

Exemple :  $f(x, y, z) = 2xz^2 + 4x^2y$  ;  $g(x, y, z) = \frac{xy + 3z^2}{x+z}$

## III. Equations différentielles

### 1) Définition

Une équation différentielle est une équation dans laquelle figurent une fonction inconnue  $f(x)$  et certaines de ses dérivées :  $F(x, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$

- L'ordre d'une telle équation est celui de la dérivée la plus élevée (soit ici (n))
- Cette équation n'a pas de solutions uniques mais correspond à une famille de solutions contenant un nombre de constantes arbitraires égal à l'ordre de l'équation.

**NB :** Dans cette partie nous-nous limiterons à la résolution des équations différentielles d'ordre 2.

## 2) Equations différentielles du premier ordre

Ici  $n = 1$  et donc l'équation est sous la forme  $F(x, y, y') = 0$ .

### a) Types d'équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre

Nous distinguerons deux types d'équations à savoir :

#### - Les équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants

Ce sont les équations différentielles de la forme:

$$ay' + by = f(x), \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a \neq 0$$

#### - Les équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients variables

Ce sont les équations différentielles de la forme :  $a(x)y' + b(x)y = f(x)$

### b) Résolution de l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre

La résolution de cette équation se fait en 3 étapes :

#### - Première étape

Chercher la solution de l'équation homogène, c'est-à-dire résoudre l'équation sans second membre :  $ay' + by = 0$  ou  $a(x)y' + b(x)y = 0$

#### - Deuxième étape

Chercher la solution particulière. Cette étape existe seulement dans le cas où le second membre est non nul.

Il existe deux méthodes pour la recherche de la solution particulière : la méthode directe encore appelée méthode astucieuse et la méthode de la variation de la constante.

La méthode directe consiste à poser la solution particulière sous la forme de la fonction du second membre. Etant donné que la solution particulière est solution de l'équation différentielle, les constantes sont déterminées en remplaçant cette solution particulière dans l'équation différentielle « mère ».

**NB :** Cette méthode est conseillée lorsque le second est une fonction polynôme.

La méthode de la variation de la constante consiste à transformer la constante obtenue dans la solution de l'équation homogène en une fonction. Cette fonction est déterminée en remplaçant cette solution particulière dans l'équation différentielle « mère »

- **Troisième étape**

Trouver la solution générale. La solution générale est obtenue en faisant la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière.

Exemple 1 :  $2y' + y = x - 1$

Exemple 2 :  $(x^2 + 1)y' + xy = 2x^2 + 1$  ;  $xy' - y = x^2 \cos x$

**3) Equations différentielles du second ordre**

Ce sont les équations de la forme  $F(x, y, y', y'') = 0$

**a) Types d'équations différentielles du second ordre**

Comme dans le cas du premier ordre, on distingue également deux types d'équations :

- Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

Ce sont les équations de la forme :  $ay'' + by' + cy = f(x)$ , avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $a \neq 0$

- Equations différentielles du second ordre à coefficients variables

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

**NB :** Pour ce cours, nous-nous intéresserons uniquement aux équations du second ordre à coefficients constants.

**b) Résolution des équations du second ordre**

La résolution se fait en trois étapes comme dans le cas du premier ordre.

- **Première étape**

Chercher la solution de l'équation homogène, c'est-à-dire résoudre l'équation sans second membre :  $ay'' + by' + cy = 0$

Pour ce faire, on détermine l'équation caractéristique :  $ar^2 + br + c = 0$

Le discriminant de cette équation s'écrit :  $\Delta = b^2 - 4ac$

La solution de l'équation homogène dépend la nature du discriminant :

$$\text{si } \Delta > 0 \Rightarrow \text{on a deux réelles distinctes } r_1 \text{ et } r_2$$

La solution de l'équation homogène se met donc sous la forme :  $y_H = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$

$$\text{si } \Delta = 0 \Rightarrow \text{on a une racine double } r$$

La solution de l'équation homogène se met donc sous la forme :  $y_H = (A + Bx)e^{rx}$

$\text{si } \Delta < 0 \Rightarrow \text{on a deux racines complexes conjuguées } r_1 \text{ et } r_2 \text{ telles que :}$

$$r_1 = \alpha + i\beta \text{ et } r_2 = \alpha - i\beta$$

La solution de l'équation homogène se met donc sous la forme :

$$y_H = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

- **Deuxième étape**

Chercher la solution particulière. Cette étape existe seulement dans le cas où le second membre est non nul. Dans le cas où on n'a pas une idée de la forme de la solution particulière alors on procède par la méthode de la *variation de la constante*.

- **Troisième étape**

Trouver la solution générale. La solution générale est obtenue en faisant la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière.

**Exemples :**  $y'' - 2y' + y = 0$  ;  $y'' - 5y' + 6y = 0$  ;  $y'' + 4y = 0$

**Consignes :** Prière aller télécharger les exercices d'application et vous entraînez. Ensuite télécharger les Travaux Dirigés (Travail à faire) et traiter les exercices afin d'évaluer votre niveau de compréhension de cours.